**第二部分矩阵**

1. **主要内容：**
2. **矩阵的定义**

**定义（矩阵）**由个数排成行列的数表用小括号或中括号将其括起来, 称为行列矩阵，简称矩阵, 并用一个大写字母表示, 即

,

简记为．

1. **矩阵的运算**

**加法** ，

**减法** ，

**负矩阵** ，

**数乘** ，

**矩阵乘法**

设,

，

**转置**  设矩阵，将矩阵的行列互换得到的矩阵称为矩阵的**转置矩阵**，记为，即

．

**对称矩阵** 当方阵中的元素之间有关系为，即时，称矩阵为对称矩阵．

**方阵的行列式** 设为阶方阵，则与它相对应的**阶行列式**称为矩阵的**行列式**，记做．

**伴随矩阵**

**定义6**  设为阶方阵，是元素的代数余子式，则称矩阵为矩阵的伴随矩阵，记为（读作的伴随矩阵）．

**性质** 1） ；

2） ；

3） ；

4） ；

5） 若可逆，则可逆，且，．

**3． 逆矩阵**

**定义7** 对于方阵, 若有方阵满足, 则称方阵可逆, 并把方阵称为方阵的**逆矩阵**．记作，即．

**性质** （1） 若为可逆矩阵, 则的逆矩阵唯一；

（2） ；

（3） 若常数, 则；

（4） 与都可逆，则可逆, 且；

一般有．

**定理** 阶方阵可逆的充分必要条件是其行列式，且当可逆时，有．其中为的伴随矩阵．

**4、矩阵的初等变换**

矩阵的下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

（1） 交换矩阵的两行(交换两行,记作)；

（2） 以一个非零的数乘矩阵的某一行(第行乘数,记作)；

（3） 把矩阵的某一行的倍加到另一行(第行乘加到行,记为)．

把定义中的“行”换成“列”，即得矩阵的初等列变换的定义(相应记号中把换成)．

初等行变换与初等列变换统称为**初等变换**．

**定义**  若矩阵经过有限次初等变换变成矩阵, 则称矩阵与等价, 记为．

矩阵之间的等价关系具有下列基本性质：

（1） **反身性** ；

（2） **对称性** 若,则；

（3） **传递性** 若,,则．

**初等矩阵**

**定义**  对单位矩阵施以一次初等变换得到矩阵称为**初等矩阵**．

三种初等变换分别对应着三种初等矩阵．

（1） 的第行(列)互换得到的矩阵

；

（2） 的第行(列)乘以非零数得到的矩阵

；

（3） 的第行乘以数加到第行上,或的第列乘以数加到第列上得到的矩阵

．

**定理** 设是一个矩阵, 对施行一次某种初等行(列)变换, 相当于用同种的阶初等矩阵左（右）乘．

**5、 矩阵的秩**

在矩阵中，任取行列，位于这些行列交叉处的个元素，不改变它们在中所处的位置次序而得到的阶行列式，称为**矩阵****的阶子式**．

**定义14** 设为矩阵，如果存在的阶子式不为零，而任何阶子式(如果存在的话)皆为零，则称数为**矩阵****的秩**，记为． 并规定零矩阵的秩等于零．

矩阵的秩具有下列性质：

（1） 若为矩阵, 则；

当时，称矩阵为**满秩矩阵**． 否则称为**降秩矩阵**．

（2） ．

（3） 若, 则．

（4） 若可逆，则．

（5） ．

（6） ．

（7） ．

（8） 若，则．

**二、关于矩阵可逆主要结论**

**n阶矩阵可逆 ；**

**；**

**；**

**只有零解；**

**矩阵的列向量组或行向量组线性无关；**

**矩阵的特征值不为零。**

**三 例题：**

**（一）、填空题**

**例 **

**例 已知三阶方阵，为的伴随矩阵，则的伴随矩阵 0 ．**

**例 设3阶矩阵*A*的特征值互不相同, 若行列式, 则*A*的秩为**．

**例** **设矩阵为正交矩阵，则．**

**例** 设矩阵，则的秩为\_1\_\_\_\_\_\_.

**（二）选择题**

**例** 为阶可逆方阵，则以下结论正确的是（ A ）

(A) 可用行初等变换把变为； (B) ；

(C) 可逆； (D) 可逆．

**例** 设为矩阵，，而，则（ D ）．

1. ； (B)； (C)； (D) ．

**例** 设是阶方阵，为阶单位矩阵.若，则（ D ）.

（A）或. （B）.

（C）. （D）.

**例 已知****，，设****，其中****是****的转置，**

**则** **【 B 】．**

**(A)** **； (B)**  **；**

**(C)** **； (D)** **.**

**例**

**例 设，，，**

**，，则【 A 　】．**

1. **； (B) ； (C) ； (D) ．**

**例**设均为2阶矩阵，分别为的伴随矩阵，若，则分块矩阵的伴随矩阵为( B）.

. .

. .

【答案】B

【解析】根据，若

分块矩阵的行列式，即分块矩阵可逆





故答案为B。

**例**设为阶非零矩阵，为阶单位矩阵．若，则【 **C** 】

则下列结论正确的是：

(A) 不可逆，则不可逆. (B) 不可逆，则可逆.

(C) 可逆，则可逆. (D) 可逆，则不可逆.

【**解**】故应选(C).

，．

故，均可逆．故应选(C).

**(三)、解答题**

**例设阶方阵和，满足，若**

**求.**

**解: 由两端同时右乘A，并化简可得 **

**又因为 **

**所以 **

**例 已知阶方阵、满足，为阶单位矩阵，**

**（1）证明可逆；**

**（2）当时，求．**

**解 (1)由知**

****

**所以可逆；**

**（2）由知**

****

**又**

**故**

**例** 设阶矩阵和满足条件：．

⑴ 证明：是可逆矩阵，其中是阶单位．

⑵ 已知矩阵，求矩阵．

**解：**

⑴ 由等式，得，

即

因此矩阵可逆，而且．

⑵ 由⑴知，，即





.

**例 且,证明可逆，并求其逆矩阵．**

**由 得，，**

**则可逆，且.**

**例** 设阶方阵满足：．证明：可以表示成个秩为的矩阵之和．

由已知，存在阶可逆阵、，使得

　　　　　　　　　　　　　　　２分

２分



因此，　６分

且，．